



*Material didáctico y experimentos
demostrativos para la asignatura
"mecánica", parte 1*

Prof. Hugo Serrano Miranda Fecha: 14 de junio de 2022

Práctica 1

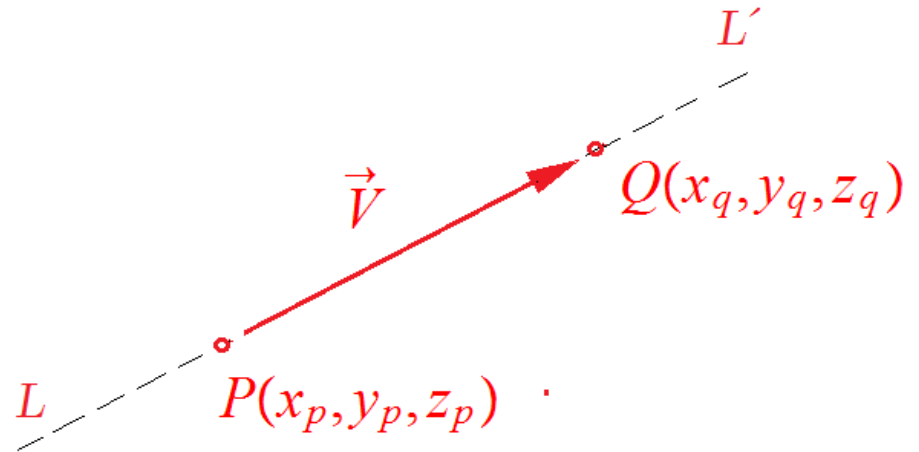
Equilibrio de un semáforo suspendido por medio de dos cables

Práctica 2

Determinación del centro de gravedad de una tabla compuesta

Noción elemental y tradicional de la caracterización matemática de un vector

a) Mediante la representación gráfica de una flecha



b) Una terna ordenada:

$$\vec{V} = [V_x, V_y, V_z]$$

$$\vec{V} = V_x i + V_y j + V_z k$$

Característica importante que debería considerarse

1. Tiene un punto de aplicación

2. Tiene una magnitud: la longitud de la flecha

3. Una dirección: la de la recta donde está contenido

4. Un sentido: hacia un lado u otro de la recta

Nota: orientación equivale a dirección + sentido

Características que deben considerarse desde la perspectiva de las matemáticas

*1. **No** es un vector libre, es un vector fijo*

*1. **No** es un vector deslizante, es un vector fijo*

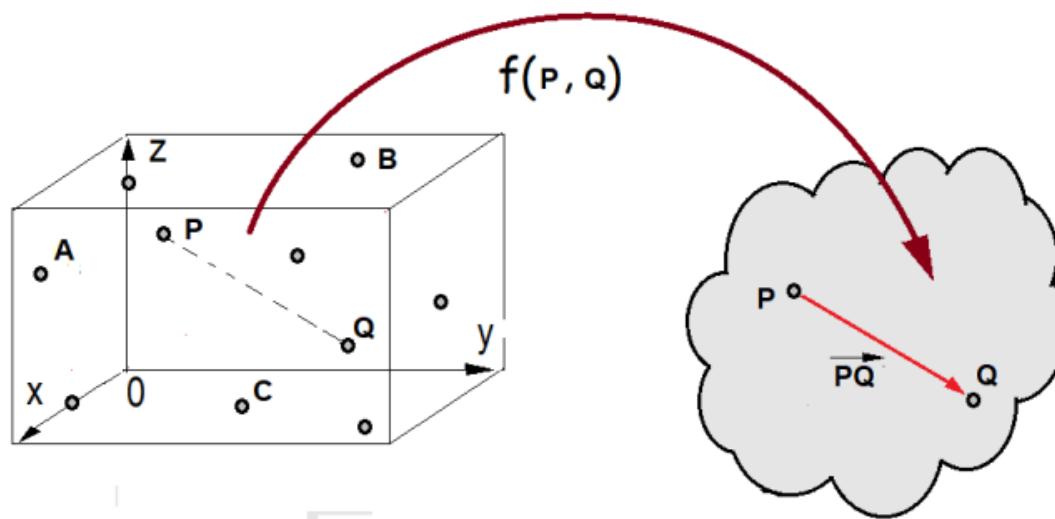
*2. **No** debe moverse su punto de aplicación*

*¡ Es un objeto matemático, no material...
es una abstracción !*

Formalización inicial de la noción de vector

Definición de un vector

Sea E el conjunto de puntos en el espacio tridimensional $A, B... P(x_P, y_P, z_P)... Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ y una función f que asocia a un cada par de puntos cualesquiera (P, Q) , tal que al aplicarse transforma al par de puntos a un *segmento dirigido*, es decir, un vector $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ que va desde el punto P , al que se le llama origen del vector, hasta el punto Q , al que se le llama extremo del vector



Correspondencia puntos-vectores

$$f : (P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = [(x_Q, y_Q, z_Q) - (x_P, y_P, z_P)] = [x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P]$$

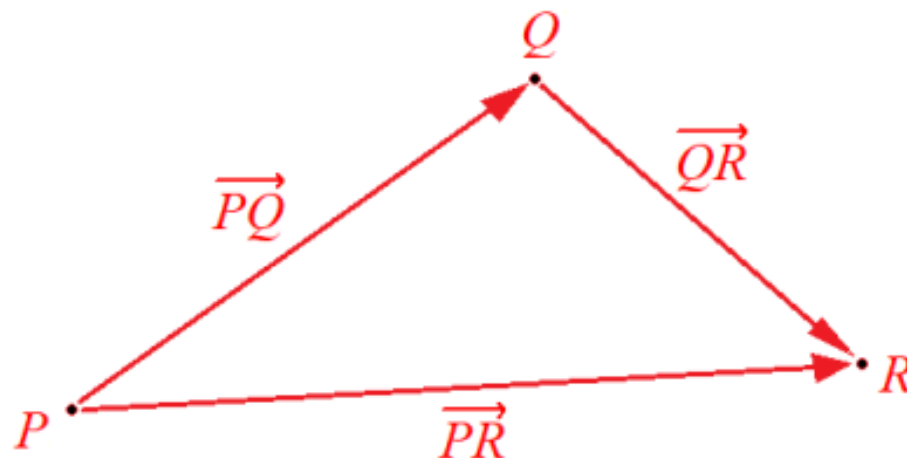
Postulado del triángulo

En esta función se verifican las siguientes condiciones

- 1) Para cada punto P y cada vector $\vec{v}$, existe un punto único Q que satisface $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$
- 2) la función $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ satisface

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$



Suma de vectores

Características métricas de los segmentos dirigidos

- La magnitud del segmento dirigido $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ que se denota por $|\overrightarrow{PQ}|$
- se mide en unidades de longitud,
- es la distancia entre los puntos $P (x_P, y_P, z_P)$ y $Q (x_Q, y_Q, z_Q)$,

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

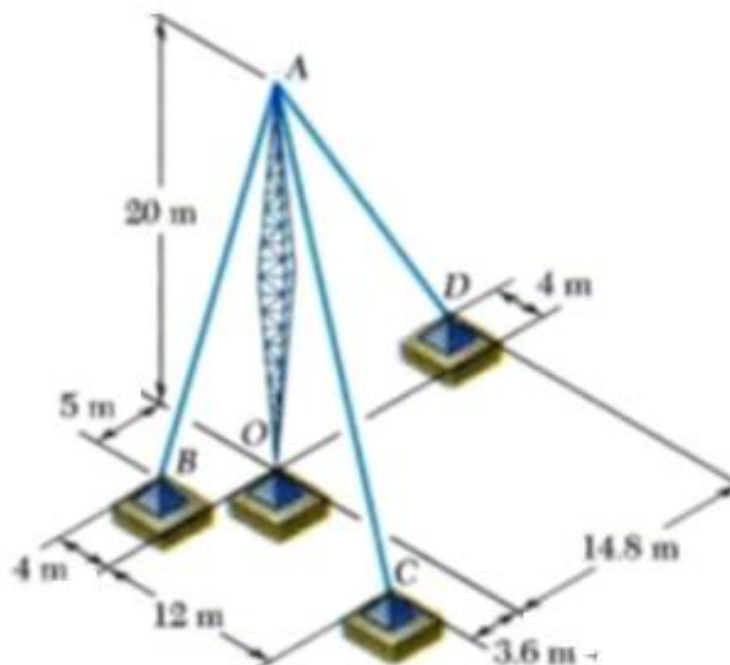
Un ejemplo sencillo...(1)

La figura muestra una antena de telecomunicaciones, que se sujeta en el punto A por medio de tres cables cuyos extremos están anclados en los puntos B , C y D

Determinar

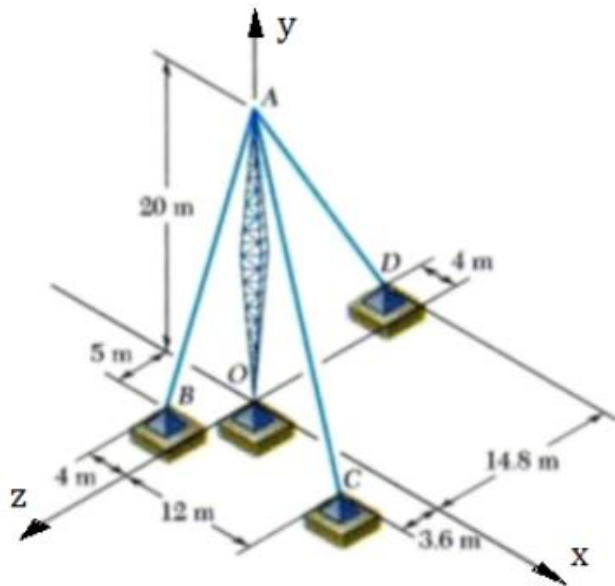
a) los vectores $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{BC}$, $\vec{v}_3 = \overrightarrow{AC}$. A partir de la definición dada por $f : (P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ}$

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= f(A, B) = \overrightarrow{AB}, \\ \vec{v}_2 &= f(B, C) = \overrightarrow{BC}, \\ \vec{v}_3 &= f(A, C) = \overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

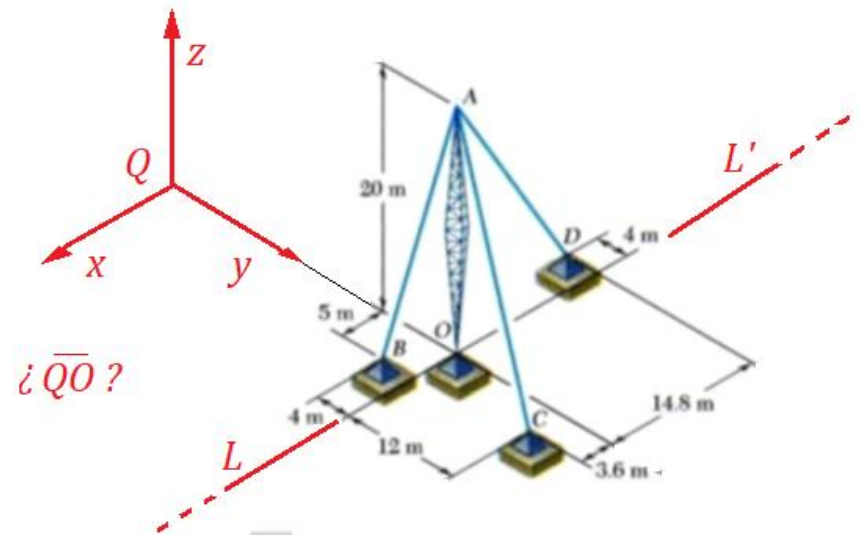


Antena de telecomunicaciones

El marco de referencia es cuestión de conveniencia... ¡No de fundamento!



Antena de telecomunicaciones

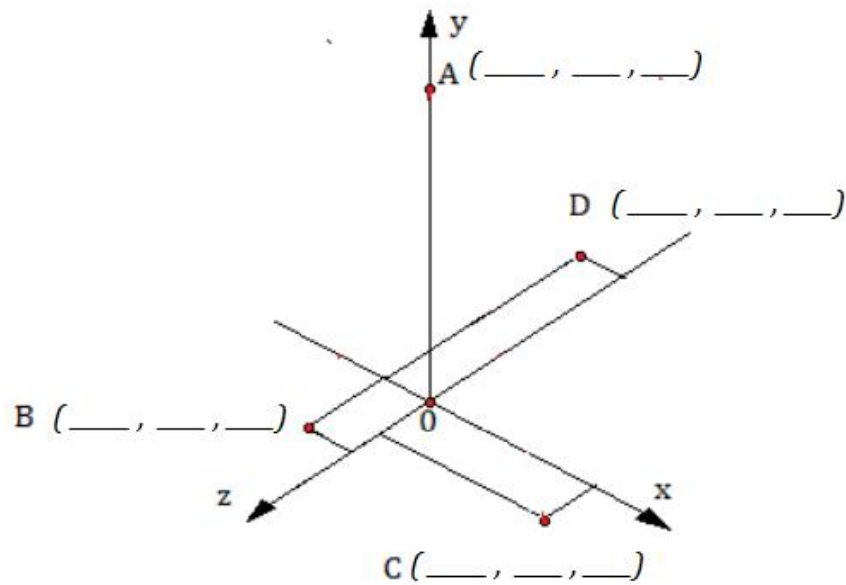


Antena de telecomunicaciones

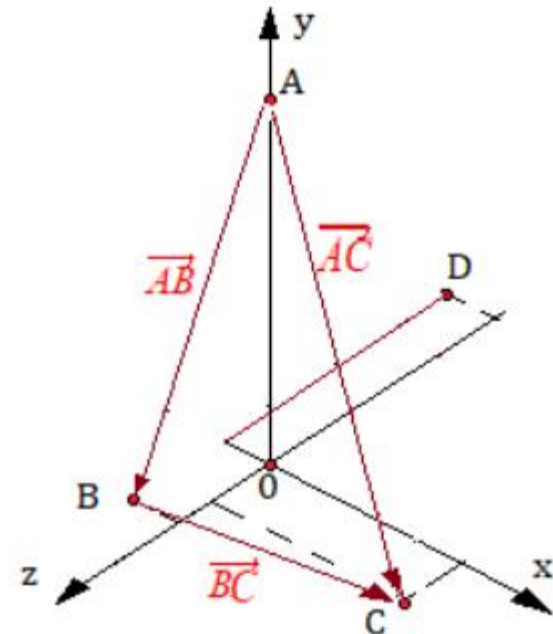
¡Refleja la personalidad del analista!

Un ejemplo sencillo...(3)

Obtención de los vectores



Ubicación de puntos A, B, C y D respecto a $0xyz$



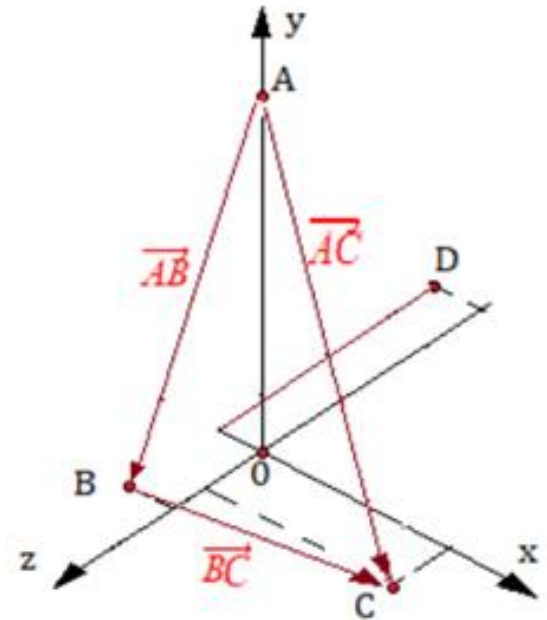
Vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

Un ejemplo sencillo...

a) Los puntos A , B , C y D tienen las siguientes coordenadas

$A(0, 20, 0)$, $B(-4, 0, 5)$, $C(12, 0, 3.6)$ y $D(-4, 0, 14.8)$,

metros respectivamente



Por lo que, cada una de la funciones queda definida de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= f(A, B) = \overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] \\ &= [-4 - 0, 0 - 20, 5 - 0] = [-4, -20, 5] \quad [m]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= f(B, C) = \overrightarrow{BC} = [x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B] \\ &= [12 + 4, 0 - 0, 3.6 - 5] = [16, 0, -1.4] \quad [m]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= f(A, C) = \overrightarrow{AC} = [x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A] \\ &= [12 - 0, 0 - 20, 3.6 - 0] = [12, -20, 3.6] \quad [m]\end{aligned}$$

Solución de otras propiedades

El vector suma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ queda determinado de la siguiente manera

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [-4, -20, 5] + [16, 0, -1.4] = [12, -20, 3.6] \quad [m]$$

Resultado que es igual a $\vec{v}_3$

c) Las distancia entre los puntos señalados no son más que las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overline{AB} = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-20)^2 + 5^2} = 21 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = \left| \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{16^2 + 0^2 + (-1.4)^2} = 16.01 \text{ m}$$

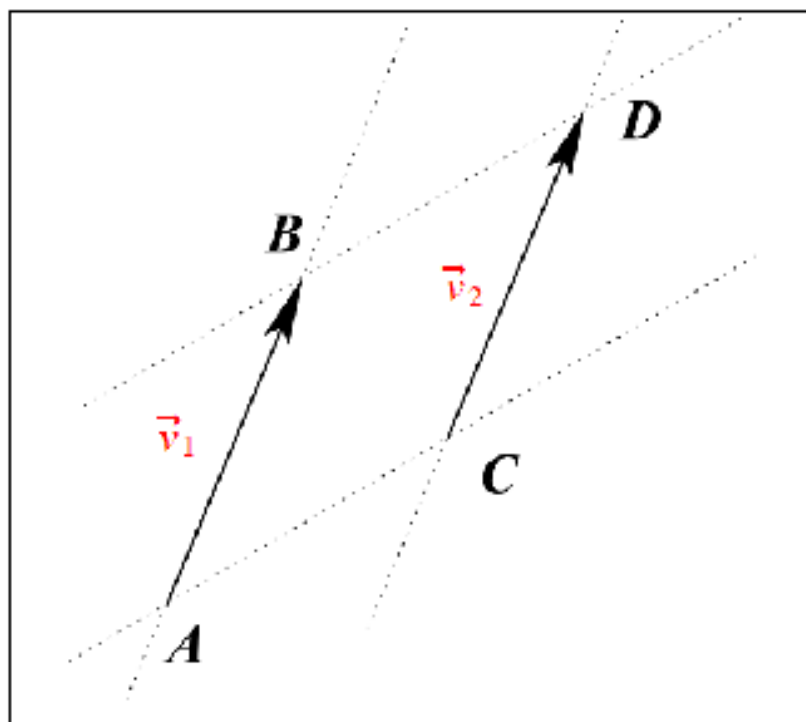
$$\overline{AC} = \left| \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{12^2 + (-20)^2 + 3.6^2} = 23.6 \text{ m}$$

Observación

El problema resuelto, únicamente involucra aspectos geométricos de puntos localizados en la estructura de la antena, no considera, de ninguna manera aspectos físicos como fuerzas o bien otros elementos mecánicos que hacen que se encuentre en equilibrio

¿Qué es un vector equipolente?

Dos segmentos dirigidos fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, se dice que son equipolentes (se denota por $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$) si tienen la misma magnitud, dirección y sentido, con diferente punto de aplicación.



Segmentos fijos orientados

Vectores libres

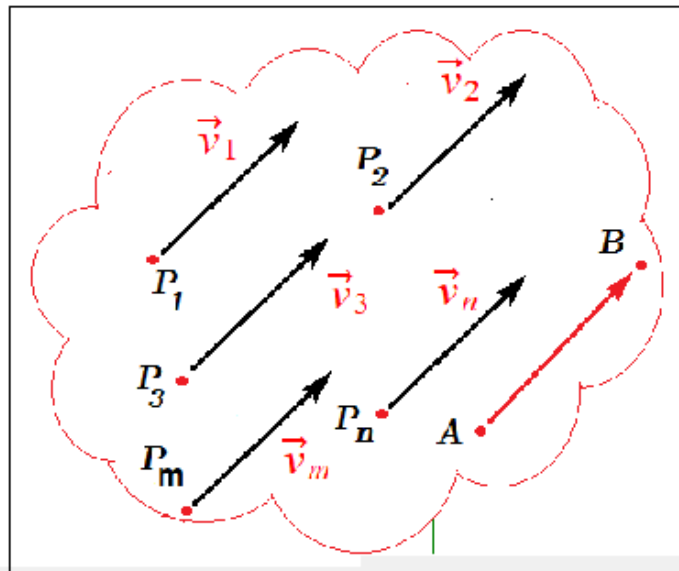
el vector fijo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, y todo el conjunto de puntos $P_1, P_2, P_3, P_m, \dots, P_n$

A cada uno de estos puntos le corresponde un vector

equipolente representativo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_m, \dots, \vec{v}_n$ del vector fijo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

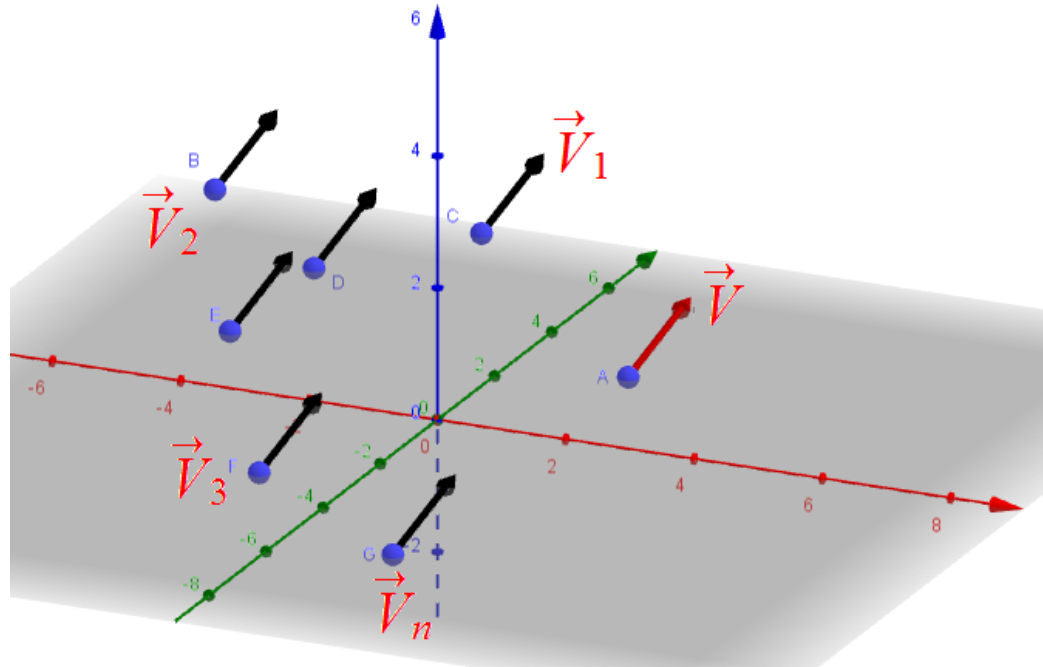
a cada punto del espacio le corresponde un vector

a todo este conjunto de vectores equipolentes se les denominan vectores libres.



Vectores equipolentes y vector representativo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

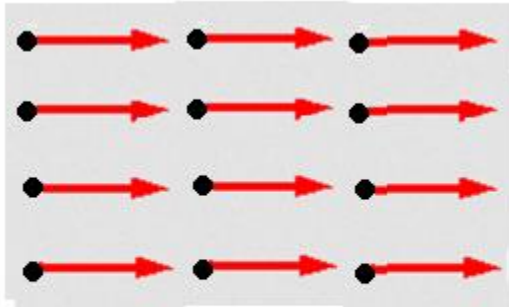
El campo vectorial y los Vectores Equipolentes



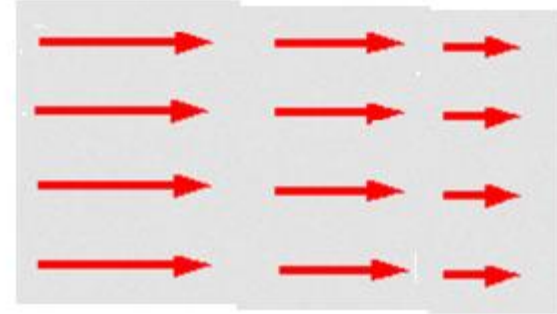
Vector $\vec{V}$

Vectores $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ equipolentes a $\vec{V}$

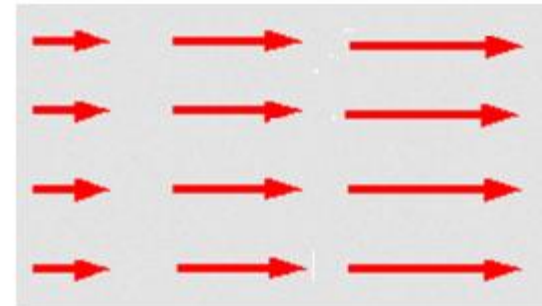
El campo vectorial y los Vectores Equipolentes



Flujo de coches con velocidad constante

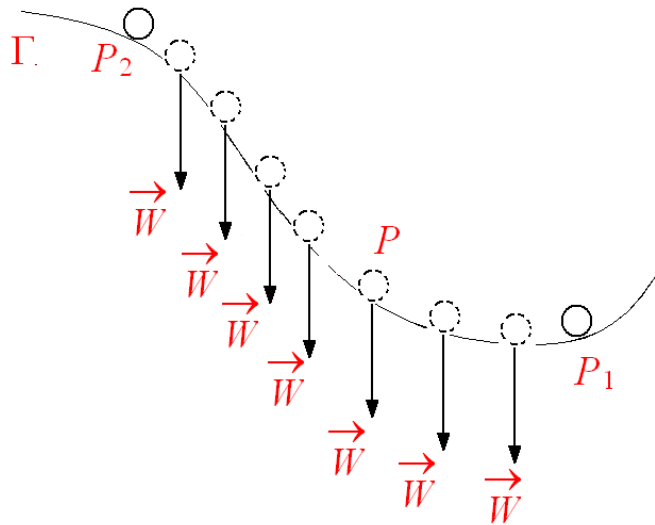


Llegada de coches a cruce con semáforo en rojo

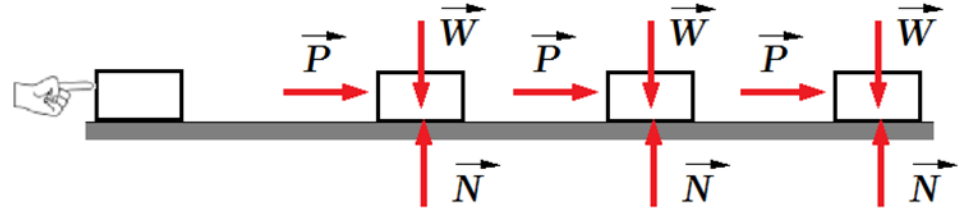
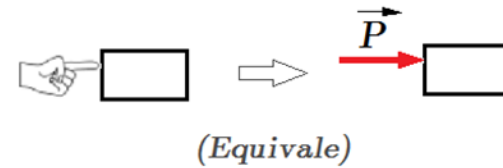


Salida de coches a cruce con semáforo en verde

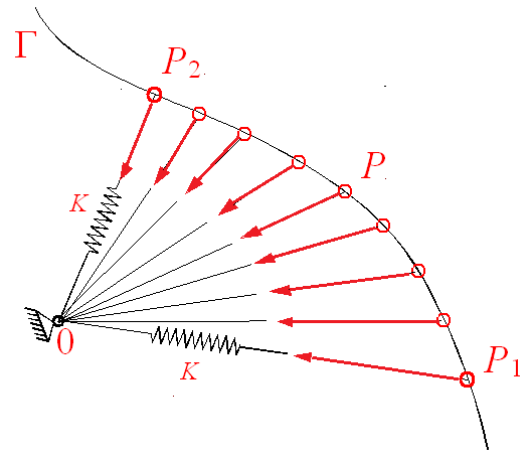
La variable tiempo y los Vectores Equipolentes en Mecánica (Los vectores constantes)



Pelota que cae sobre una rampa



Empujar y mover un bloque



Acción de mover el extremo libre de un resorte.

NO HAY EQUIPOLENCIA

Concepto de vector unitario

Vector $\vec{A}$

$\vec{v} = \alpha \vec{A}$ es un vector escalado

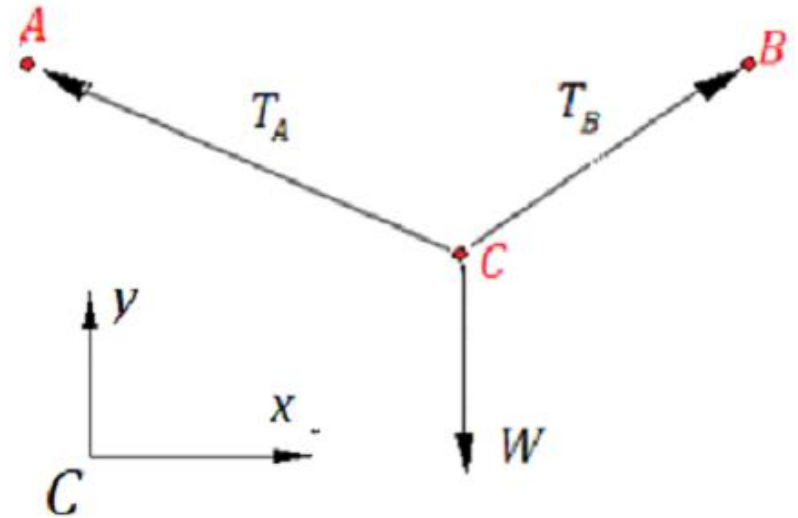
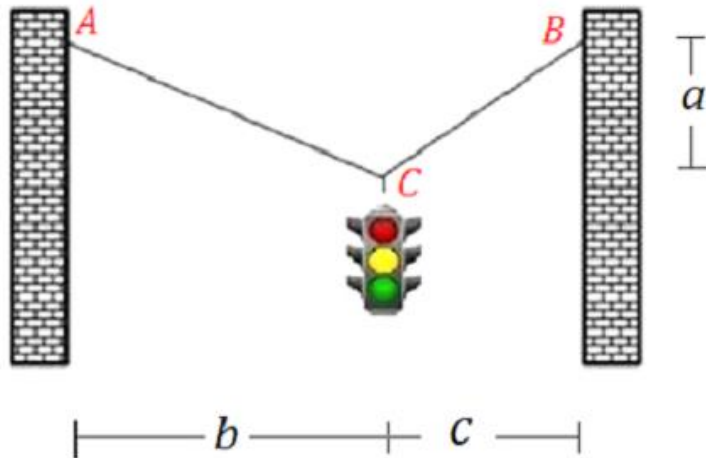
Cuánto debe vale α para qué:

a) $|\alpha \vec{A}| = 1$

b) ¿qué unidades debe tener α , para que el resultado de la cantidad escalar sea adimensional?

c) ¿Qué interpretación debe tener el resultado $\alpha \vec{A}$

Presentación y mediciones



AC: Ligas en serie

CB: Ligas en serie + hilo

Acopio de datos del modelo con ligas

Registro de los valores de las masas

$m_1 =$ _____ gm

$m_2 =$ _____ gm

Longitud natural de las ligas (L_N)

$L_N =$ _____ cm

Valores de a , b y c

$a =$ _____ cm

$b =$ _____ cm

$c =$ _____ cm

Longitud final de las ligas (L_F)

$L_{FA} =$ _____ cm

$L_{FB} =$ _____ cm

Acopio de datos del modelo con ligas

Quitar los pesos, suspenderlos en cualquier par de ligas y medir la deformación final de las ligas en serie

$$L_{FC} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$$

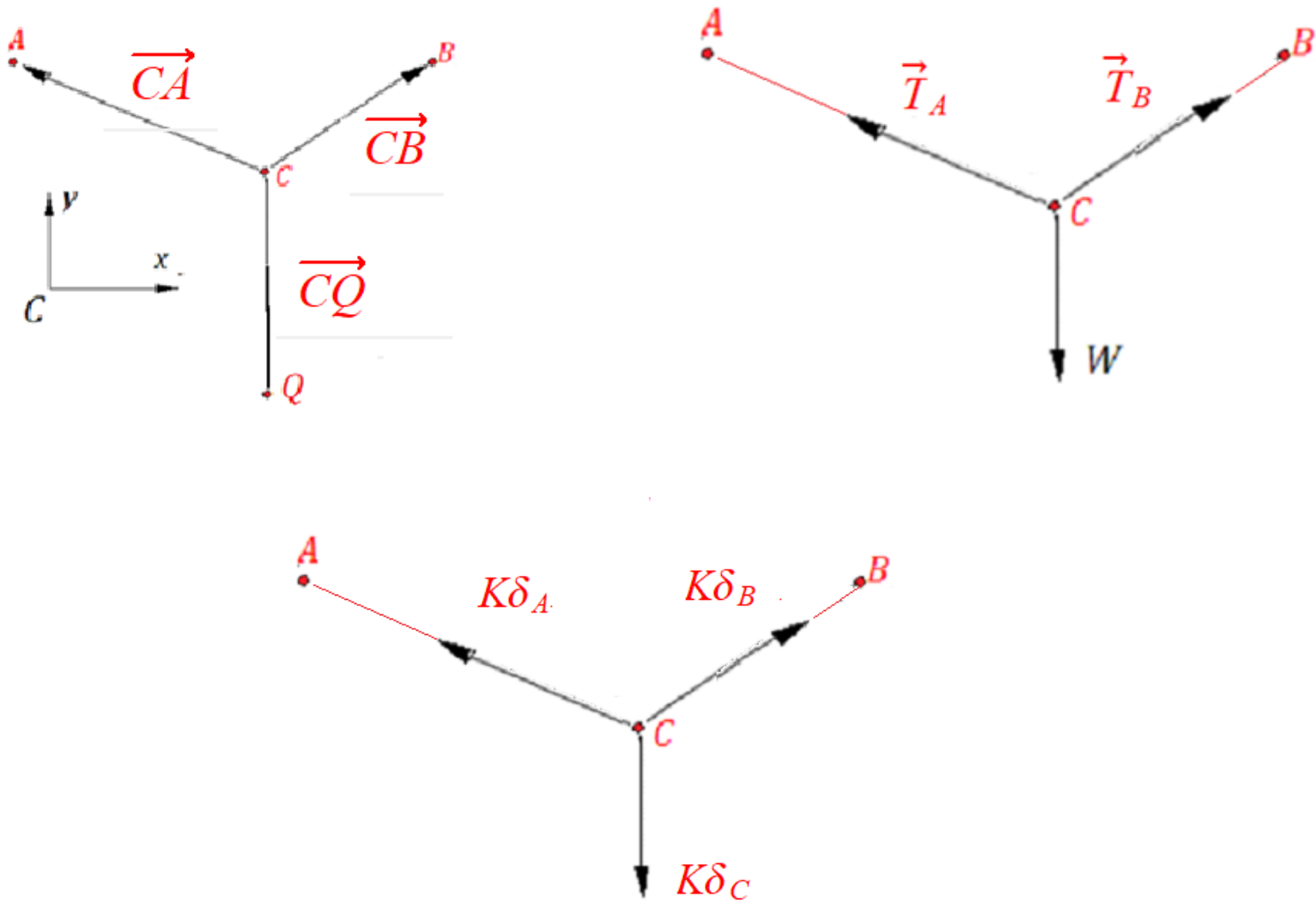
Deformación neta de las ligas

$$\delta_A = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$$

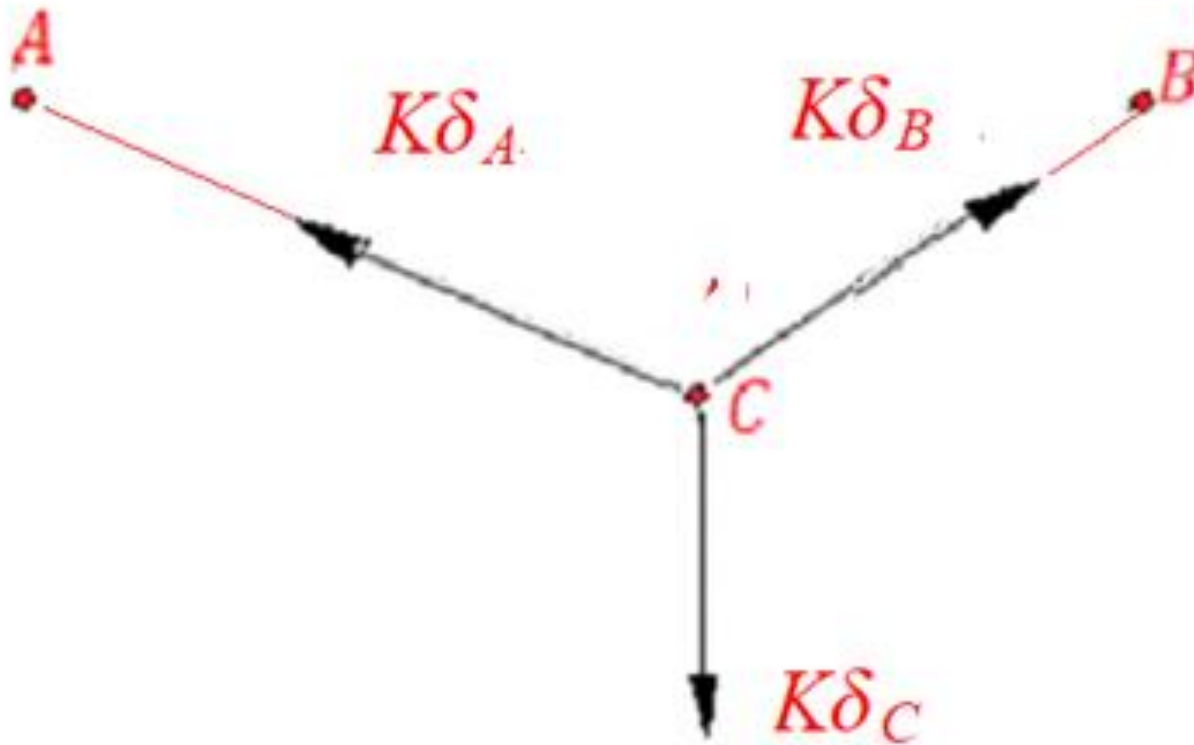
$$\delta_B = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$$

$$\delta_C = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$$

Planteamiento del problema



Planteamiento del problema



δ_A , δ_B y δ_C son las deformaciones netas de las ligas
y K es una constante positiva arbitraria

Procedimiento

- a) En una hoja tamaño carta, ubicar los puntos A, B y C
- b) Trazar la rectas que pasan por los puntos C y A, hacer lo mismo para los puntos C y B
- c) Trazar una recta vertical que pase por C
- d) Representar gráficamente los segmentos dirigidos, a escala conveniente

$\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ y $\vec{F}_C$; donde $|\vec{F}_A| = K\delta_A$, $|\vec{F}_B| = K\delta_B$ y $|\vec{F}_C| = K\delta_C$

- e) Dibujar el segmento resultante $\vec{R}_{AB} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ e interpretar su resultado

Introducción a Mathematica

Vectores

Concepto de celda

borrar celda

celda anidada

1 Comentarios (Alt-7)

2 Variables

3 Asignación

4 Operaciones +, -, x, /

5 Shift-Enter (cargar un renglón)

6 El punto y coma al final de una sentencia

7 Borrar memoria (Kernel)

8 Uso de Palettes

9 Funciones trigonométricas Sin[], Cos[], Tan[],
ArcSin[], ArcCos[], ArcTan[]

10 Radianes y Grados

11 comando TrigExpand

Ejemplos

Manejo de vectores con Mathematica

Representación analítica del vector $\vec{V} = \{v_x, v_y, v_z\}$ y
 $\vec{W} = \{w_x, w_y, w_z\}$

$$\mathbf{V} = \{1, 2, -3\}$$

$$\mathbf{W} = \{-4, 0, 5\}$$

Suma de vectores

$\mathbf{V}$

$\mathbf{W}$

$$\mathbf{SVW} = \mathbf{V} + \mathbf{W}$$

Resta de vectores

$\mathbf{V}$

$\mathbf{W}$

$$\mathbf{RVW} = \mathbf{V} - \mathbf{W}$$

Resta de vectores

$\mathbf{V}$

$\mathbf{W}$

$$\mathbf{RVW} = \mathbf{V} - \mathbf{W}$$

Características del vector

`Dimensions[ $\mathbf{SVW}$ ]`

`MatrixForm[ $\mathbf{SVW}$ ]`

Características del vector

`Dimensions[ $\mathbf{SVW}$ ]`

`MatrixForm[ $\mathbf{SVW}$ ]`

Visualización de componentes

`$\mathbf{SVW}$ [[1]]`

`$\mathbf{W}$ [[2]]`

Multiplicación de
un escalar por un vector

$$2 \mathbf{W}$$

$$\alpha \mathbf{V} + \beta \mathbf{W}$$

$$\alpha \mathbf{V}$$

$$\beta \mathbf{W}$$

Magnitud de un vector

$$\mathbf{W}$$

$$\text{Norm}[\mathbf{W}]$$

Producto punto de dos vectores

$$\mathbf{V}$$

$$\mathbf{W}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$$

Producto punto de dos vectores

V

W

$V \cdot W$

Producto cruz de dos vectores

$\text{Cross}[V, W]$

$\text{Cross}[W, V]$

Presentación del equipo empleado



Teorema de la proporción

Con relación a la figura 1, si A y B son puntos en el espacio y P es un punto que pertenece a $\overrightarrow{AB}$ y que divide al segmento en la proporción dada por la relación $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{a}{b}$,

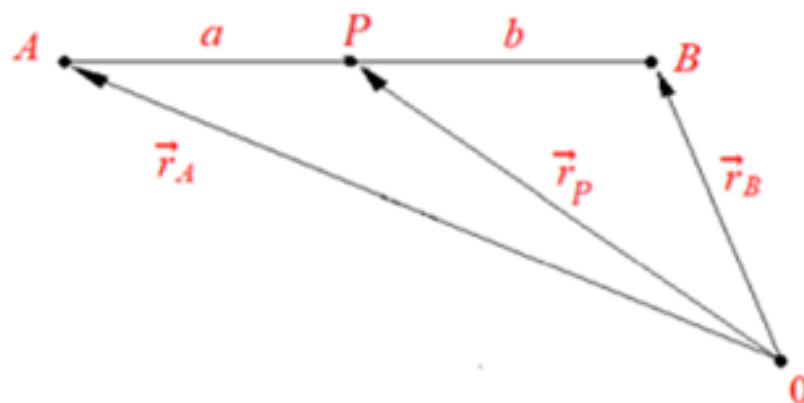


Figura 1

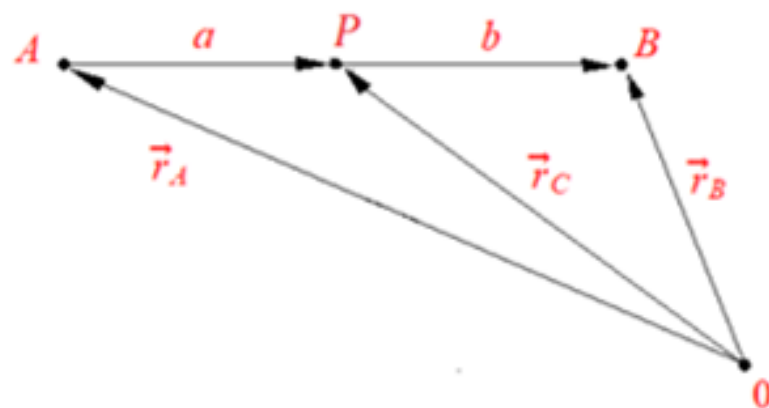
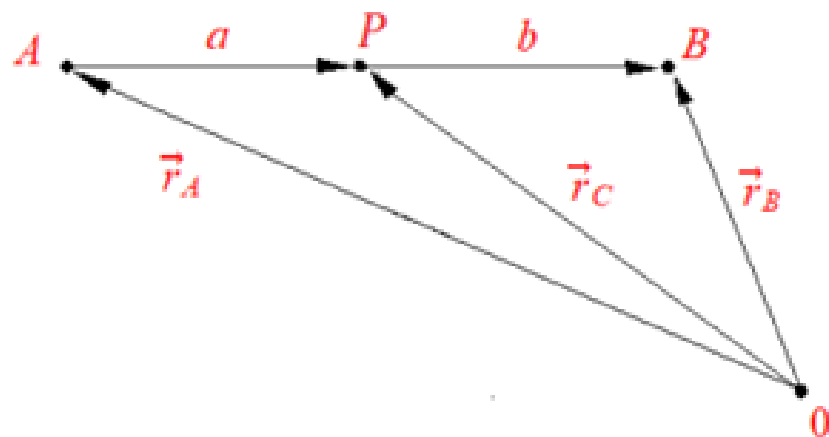


Figura 2

entonces se cumple que:

$$\vec{r}_P = \left(\frac{b}{a+b} \right) \vec{r}_A + \left(\frac{a}{a+b} \right) \vec{r}_B$$



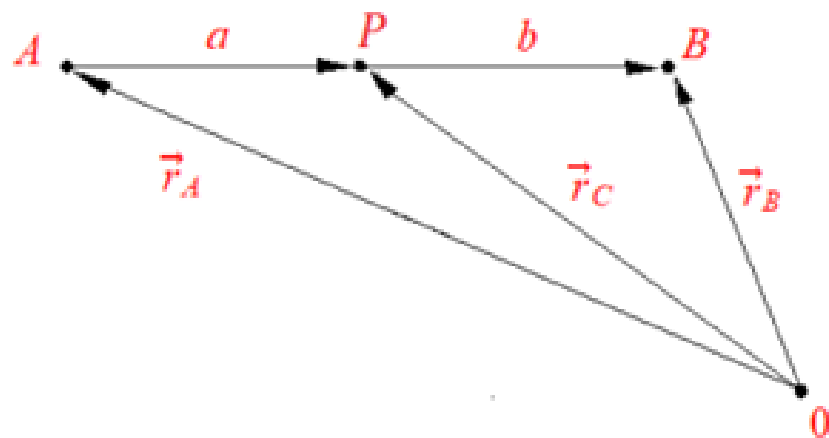
$\overrightarrow{AP}$, une los puntos A y P , es linealmente dependiente con el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ que une los puntos A y B ,

$$\overrightarrow{AP} = \beta \overrightarrow{AB}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \beta |\overrightarrow{AB}|$$

$$|\overrightarrow{AP}| = AP = a \quad \text{y} \quad |\overrightarrow{AB}| = AB = a + b$$

$$\beta = \frac{a}{a + b}$$



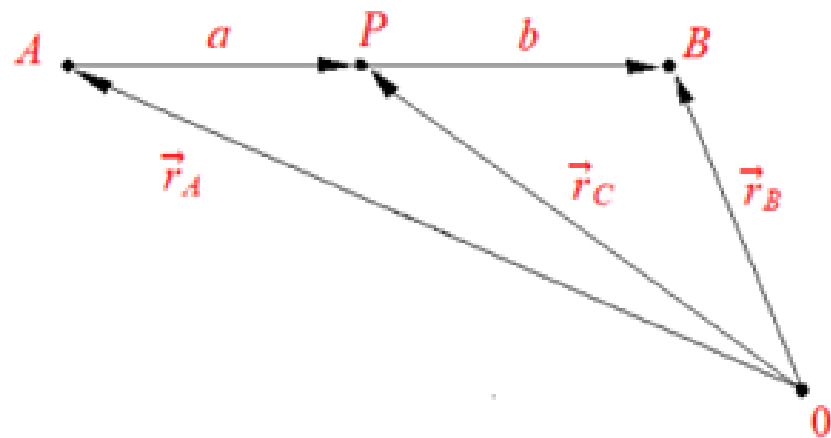
$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{a}{a+b}\right)\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB}$ es la diferencia de vectores $\vec{r}_B - \vec{r}_A$, es decir

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{a}{a+b}\right)(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

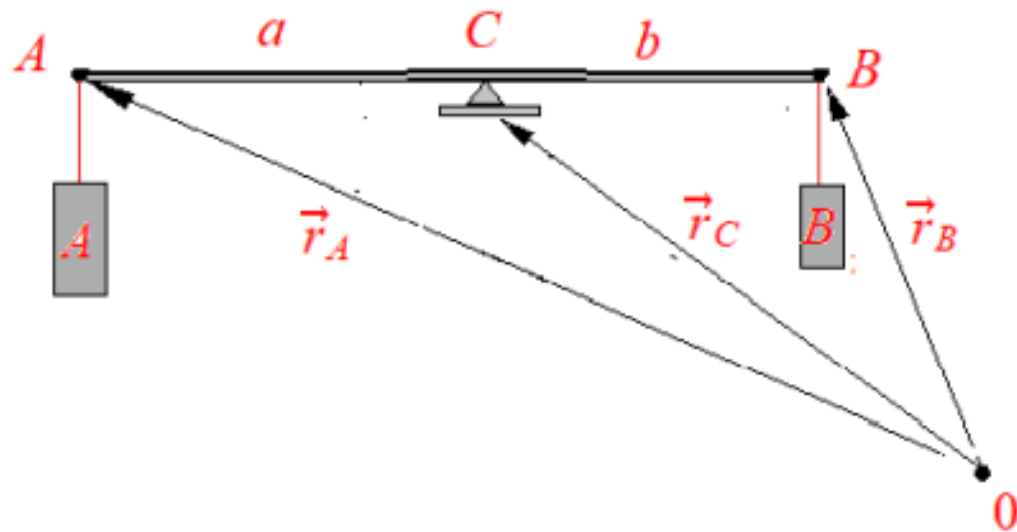
$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \overrightarrow{AP}$$



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \left(\frac{a}{a+b}\right)(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\vec{r}_P = \left(\frac{b}{a+b}\right)\vec{r}_A + \left(\frac{a}{a+b}\right)\vec{r}_B$$



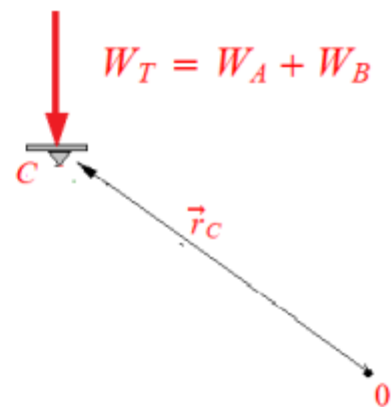
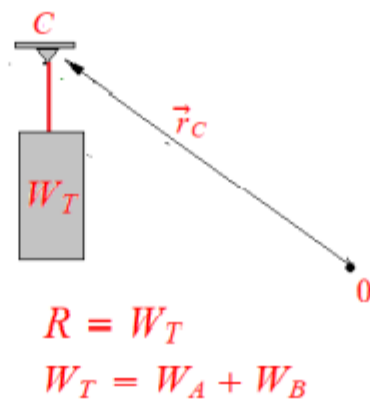
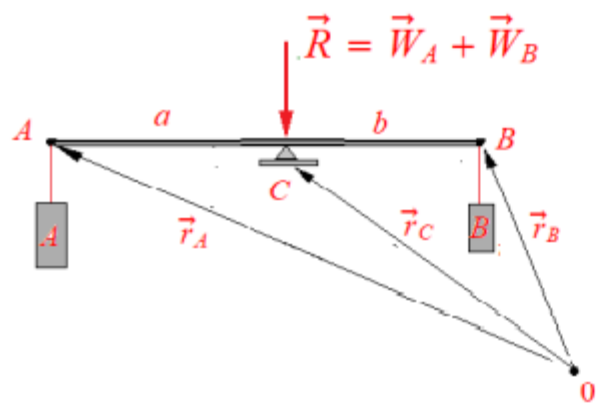
$$W_A a = W_B b$$

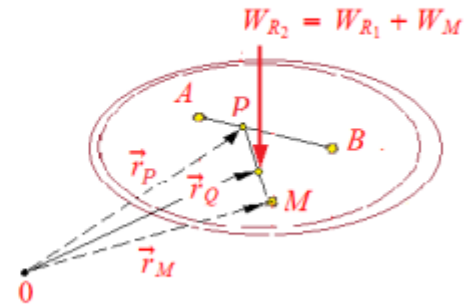
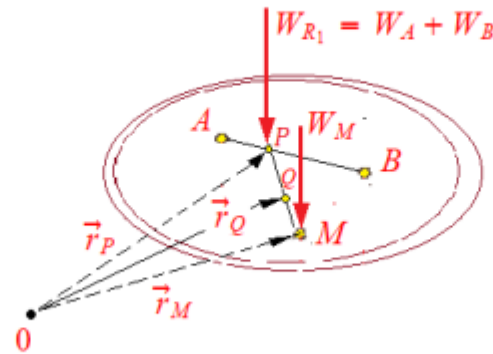
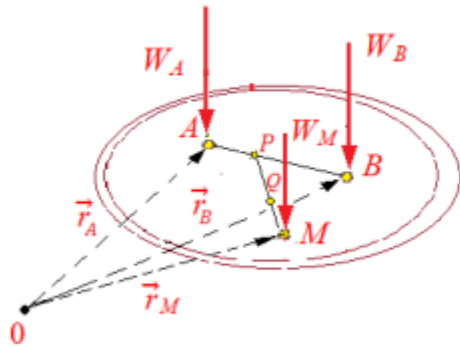
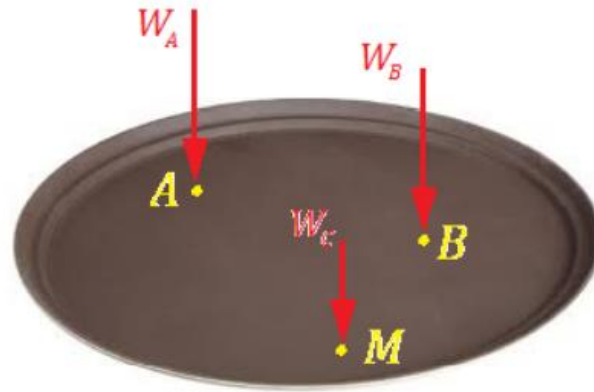
$$\vec{r}_P = \left(\frac{b}{a+b}\right)\vec{r}_A + \left(\frac{a}{a+b}\right)\vec{r}_B$$

Al despejar a de la ecuación $W_A a = W_B b$

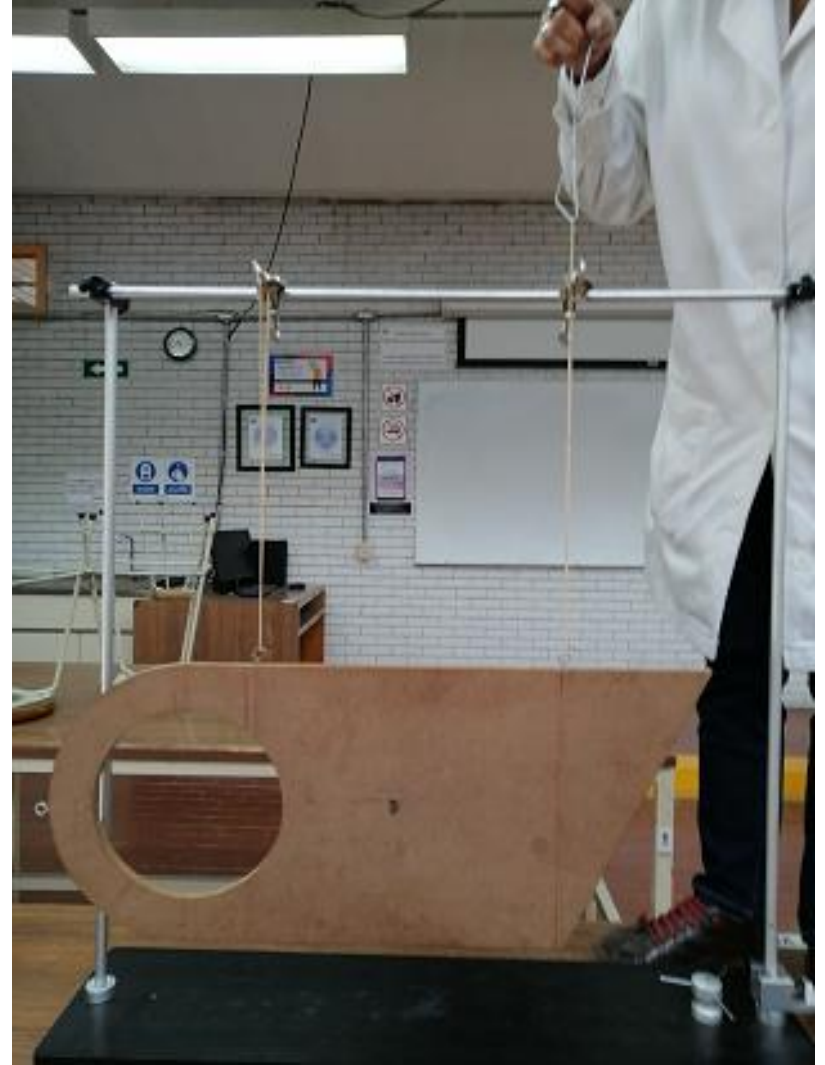
$$\vec{r}_P = \left(\frac{b}{\frac{W_B}{W_A}b + b}\right)\vec{r}_A + \left(\frac{\frac{W_B}{W_A}b}{\frac{W_B}{W_A}b + b}\right)\vec{r}_B$$

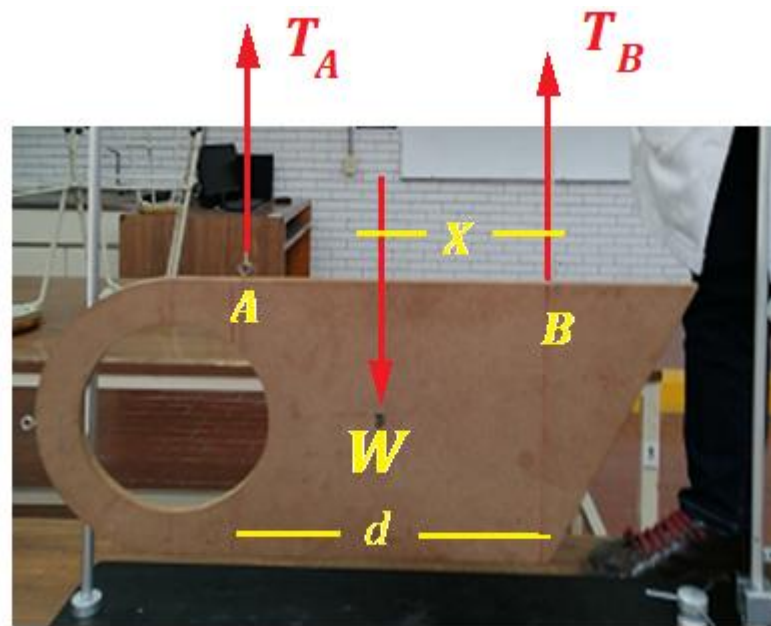
$$\vec{r}_P = \frac{W_A \vec{r}_A + W_B \vec{r}_B}{W_A + W_B}$$

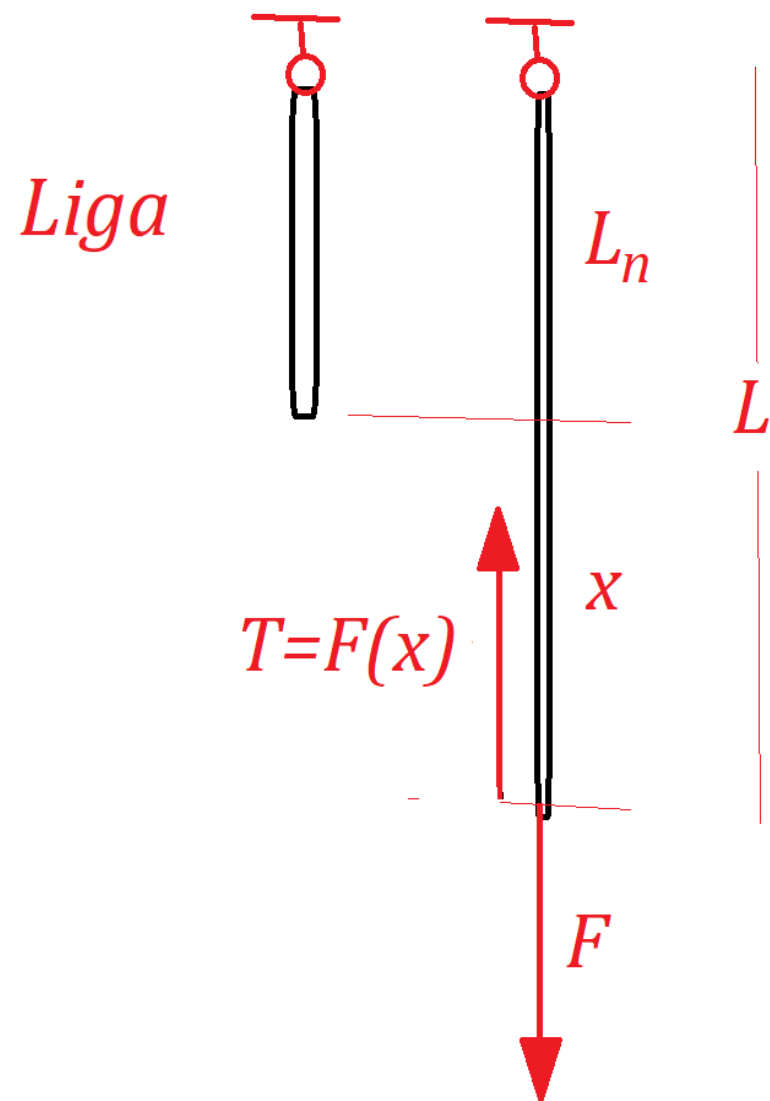


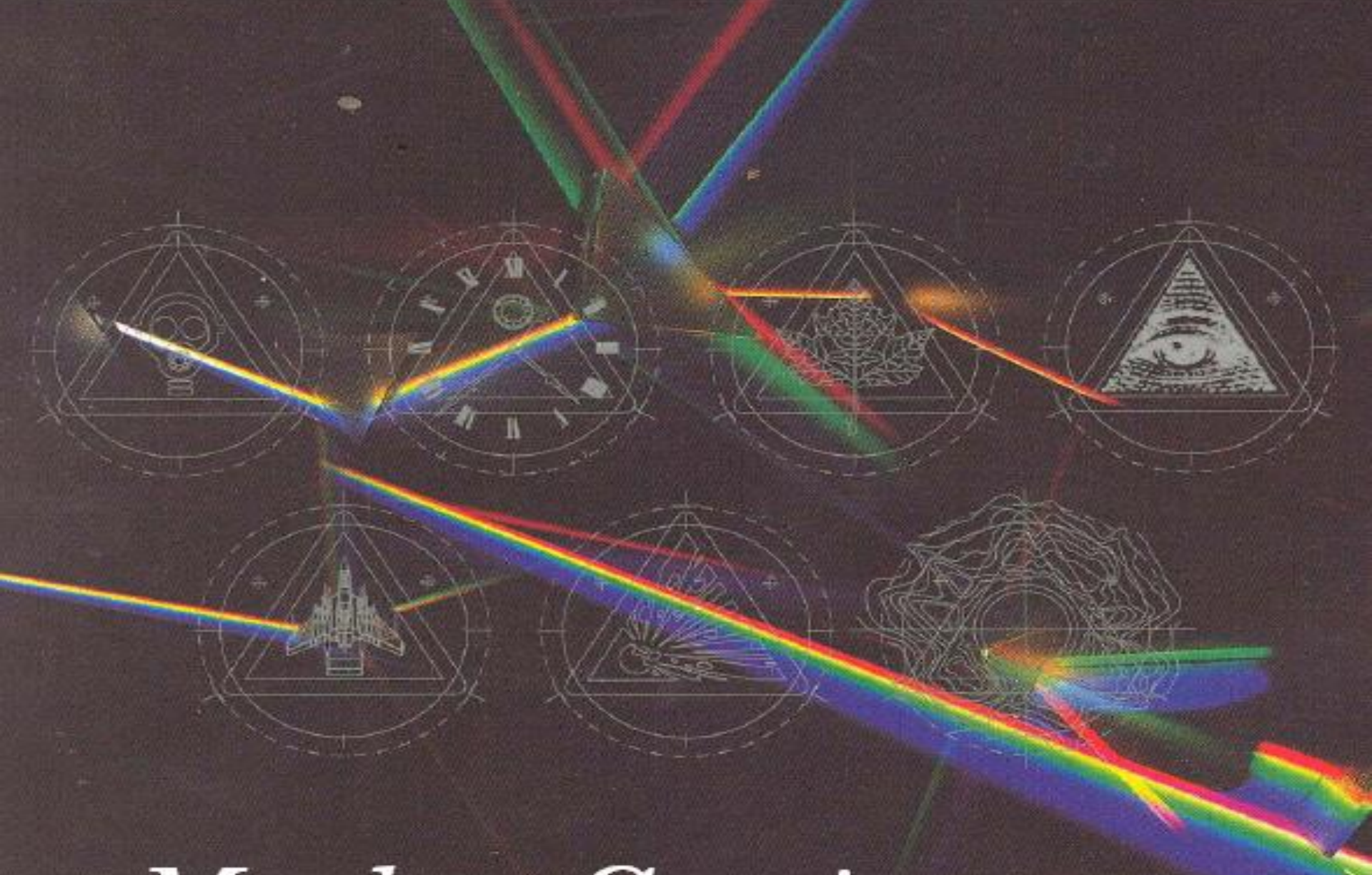


$$\vec{r}_Q = \frac{W_A \vec{r}_A + W_B \vec{r}_B + W_C \vec{r}_C}{W_A + W_B + W_C}$$









Muchas Gracias