Facultad de Ingeniería, Coordinación de Ciencias Aplicadas
Fundamentación del centro de masa a partir del álgebra de vectores

Profesor Hugo Serrano Miranda, 21 de marzo de 2022

1. Introducción

La geometría del espacio físico, [1] es el estudio de las propiedades de las figuras geométricas, en el inicio de su desarrollo, estas propiedades se fueron encontrando empíricamente, por ejemplo el teorema de Pitágoras era conocido empíricamente antes de que Pitágoras lo demostrara.

En ese tiempo la Geometría era parte de la Física en el sentido de que dependía del experimento. Con el tiempo las relaciones geométricas se fueron sistematizando y deduciendo unas de otras, hasta que en el siglo IV a.C. Euclides matemático griego de Alejandría de Egipto, publicó un tratado en el que deducía el conocimiento geométrico de su época a partir de ciertos postulados no demostrados (axiomas). Las aserciones demostradas eran los teoremas. A este punto la Geometría dejo de ser física para convertirse en matemática.

La teoría de vectores es un capítulo de la geometría Euclídea que permite tratar problemas geométricos complejos con técnicas algebraicas. La formulación de las leyes físicas se simplifica mucho con el uso de vectores, por eso las formulaciones modernas de la mecánica los usan ampliamente.

En este artículo se expone una aplicación de una formulación vectorial con el objeto de obtener el centro de masa de dos partículas para generalizar la idea de centro de masa de un conjunto de n partículas.

Se exponen de manera conjunta una parte esencial de la teoría geométrica básica de los vectores, para lo cual supondremos conocida algunos aspctos básicos de la geometría de Euclides en el espacio de dos dimensiones y las operaciones elementales del álgebra de vectores, ambos procedimientos, vinculan de manera didáctica el aprendizaje del manejo del álgebra vectorial.

Palabras clave: Segmento dirigido, multiplicación de un escalar por un vector

Teorema de la proporción

Con relación a la figura 1, si A y B son puntos en el espacio y P es un punto que pertenece a $\overrightarrow{AB}$ y que divide al segmento en la proporción dada por la relación $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{a}{b}$,

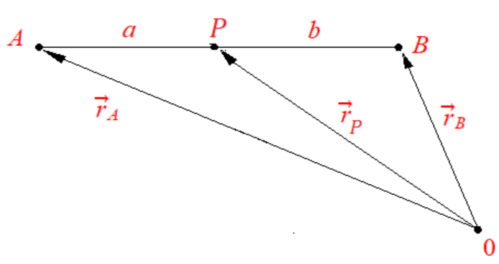

Figura 1

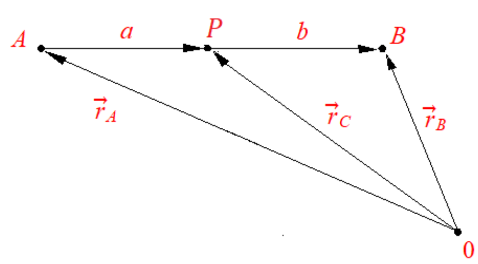

Figura 2

entonces se cumple que:

$$\vec{r}_P = \left(\frac{b}{a+b}\right)\vec{r}_A + \left(\frac{a}{a+b}\right)\vec{r}_B$$

[1]Inicialmente la Geometría (Geo = Tierra y metría = medición) era el arte de los topógrafos y agrimensores.

Solución:

En la figura 2, se muestra que el segmento $\overrightarrow{AP}$, que une los puntos A y P, es linealmente dependiente con el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ que une los puntos A y B, por lo que se puede escribir la siguiente relación:

$$\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} \tag{1}$$

Al tomar el módulo

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \beta\left|\overrightarrow{AB}\right| \tag{2}$$

Pero

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \overline{AP} = a \quad \text{y} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \overline{AB} = a + b$$

Al sustituir estas relaciones en (2) y despejar β, se obtiene

$$\beta = \frac{a}{a+b}$$

Al sustituir en (1)

$$\overrightarrow{AP} = (\frac{a}{a+b})\overrightarrow{AB} \tag{3}$$

Pero, de la figura 2, se tiene que el vector $\overrightarrow{AB}$ es la diferencia de vectores $\vec{r}_B - \vec{r}_A$, es decir

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Al sustituir esta igualdad en (3)

$$\overrightarrow{AP} = (\frac{a}{a+b})(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \tag{4}$$

Ahora bien, con relación a la figura 2, la posición del punto P queda definida por la expresión

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \overrightarrow{AP} \tag{5}$$

Al llevar (4) a (5)

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + (\frac{a}{a+b})(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \tag{6}$$

la ecuación anterior se multiplica por el término $(a + b)$ en ambos miembros y al ordenar y despejar $\vec{r}_P$ se tiene el resultado deseado.

$$\vec{r}_P = (\frac{b}{a+b})\vec{r}_A + (\frac{a}{a+b})\vec{r}_B \tag{7}$$

Ahora suponga el equilibrio de los dos cuerpos de pesos W_A y W_B respectivamente, de diferentes magnitudes, los cuales se cuelgan de los extremos A y B de una barra ideal indeformable y de peso despreciable, apoyada en C, tal como se muestra en la figura 4.

Adicionalmente, suponga que en este arreglo mecánico, indicado en la figura 3, se añade un conjunto de puntos A, B, C y O; distancias a y b; y posiciones de vectores $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ idéntica a la que se mostró en la figura 1

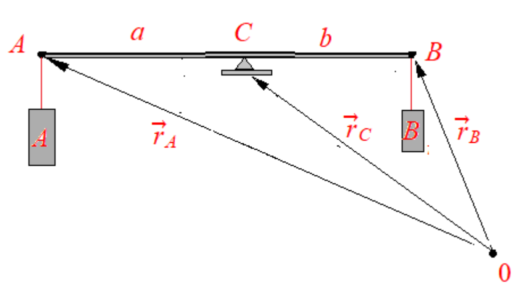

Figura 3

Por la ley de la palanca se debe cumplir que los momentos de los pesos de cada cuerpo con respecto al punto P debe cumplir la siguiente igualdad

$$W_A a = W_B b \tag{8}$$

y dado que el arreglo geométrico de la figura 3, conformado por los puntos, distancias y posiciones de vectores ya mencionado es identico al de la figura 1, debe cumplir la misma ecuación, dada por (7), la cual se repite

$$\vec{r}_P = (\frac{b}{a+b})\vec{r}_A + (\frac{a}{a+b})\vec{r}_B$$

Al despejar a de la ecuación (8) y llevarla a la ecuación anterior

$$\vec{r}_P = (\frac{b}{\frac{W_B}{W_A}b + b})\vec{r}_A + (\frac{\frac{W_B}{W_A}b}{\frac{W_B}{W_A}b + b})\vec{r}_B$$

Después de realizar ciertas operaciones algebráicas y simplificar, se obtiene

$$\vec{r}_P = \frac{W_A\vec{r}_A + W_B\vec{r}_B}{W_A + W_B} \tag{9}$$

La interpretación de la ecuación anterior supone la posición del punto P, con respecto al punto 0 que equilibra a los dos cuerpos, o bien de otra manera: supone el punto por donde pasa la resultante $\vec{R} = \vec{W}_A + \vec{W}_B$, que conforman los vectores paralelos representativos de sus pesos, tal como se muestra en la siguiente figura 4. La figura 5 muestra un sistema mecánico constituido por un sólo peso, donde se tiene el efecto equivalente de esta resultante en el apoyo C, y la figura 6 otro posible equivalente

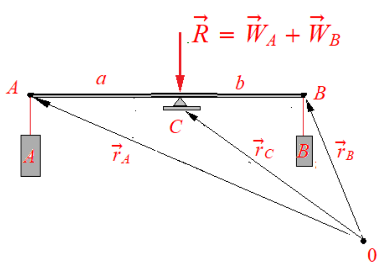

Figura 4

$\Longrightarrow$

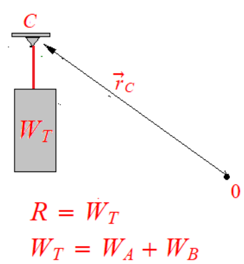

Figura 5

$\Longrightarrow$

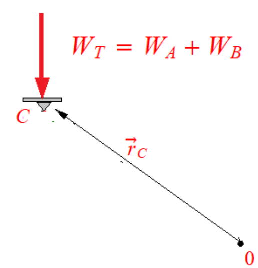

Figura 6

Con el objeto de generalizar el resultado dado por (9) y proponer una práctica acerca de este concepto, considere una charola de mesero de forma circular, en la que se muestran tres objetos. ver figura 7. Los pesos de los tres objetos se representan mediante segmentos dirigidos en la figura 8

Figura 7

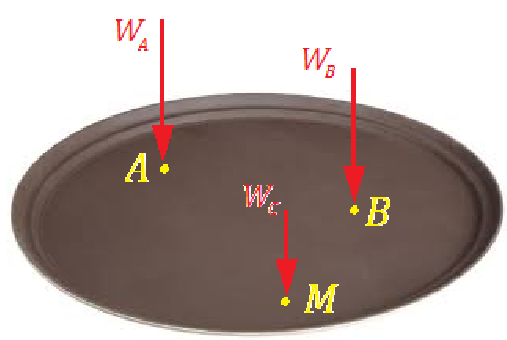

Figura 8

La figura 9 representa el equivalente de los tres pesos, y en esa misma figura se consideran las distancias: $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$, $\overline{PQ} = c$, $\overline{MQ} = d$,

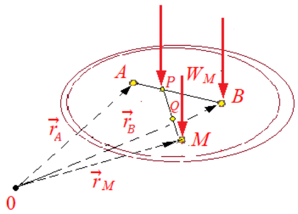

Figura 9

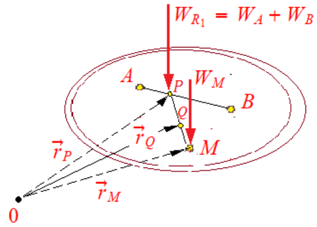

Figura 10

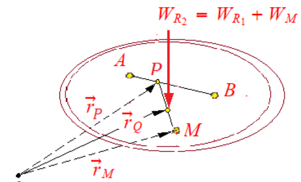

Figura 11

En la figura 10, se puede observar la posición del vector $\vec{r}_P$, la cual se obtuvo en el ejemplo anterior y está dado por la ecuación (9)

$$\vec{r}_P = \frac{W_A \vec{r}_A + W_B \vec{r}_B}{W_A + W_B}$$

Procediendo de manera inductiva, en la figura 11 se puede obtener $\vec{r}_Q$ de la siguiente forma

$$\vec{r}_Q = \frac{(W_A + W_B)\,\vec{r}_P + W_C \vec{r}_C}{(W_A + W_B) + W_C} \tag{10}$$

Al sustituir (9) en (10)

$$\begin{aligned} \vec{r}_Q &= \frac{(W_A + W_B)\left(\frac{W_A \vec{r}_A + W_B \vec{r}_B}{W_A + W_B}\right) + W_C \vec{r}_C}{(W_A + W_B) + W_C} \\ \vec{r}_Q &= \frac{W_A \vec{r}_A + W_B \vec{r}_B + W_C \vec{r}_C}{W_A + W_B + W_C} \end{aligned} \tag{11}$$

En la figura 11 se muestra la fuerza resultante $W_R = W_A + W_B + W_C$, localizada en el punto Q, su posición está dada por (11)

Realizó: Hugo Serrano

21 de marzo de 2022